

Produits Infinis

Produits infinis

Proposition : Le produit $\prod_{n \geq 1} a_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists N / n > N \ k > 0 \Rightarrow$

$$|a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

(C'est l'équivalent du critère de Cauchy pour les séries)

Corollaire : Si le produit $\prod a_n$ converge, alors $a_n \rightarrow 1$

Proposition : Soient $u_n \geq 0 \forall n$. Le produit $\prod_{n \geq 1} (1+u_n)$ converge ssi $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
(prop. analogue si $u_n \leq 0 \forall n$)

On dit que le produit $\prod (1+u_n)$ est absolument convergent si $\prod (1+|u_n|)$ converge, c.à.d si $\sum |u_n|$ converge. Avec cette définition :

Proposition : Si le produit $\prod (1+u_n)$ est absolument convergent, alors :

- 1) $\prod (1+u_n)$ converge simplement
- 2) Il est commutativement convergent
- 3) La valeur de ce produit est indépendante de l'ordre des facteurs.

Théorème : Soient $u_1(z), \dots, u_n(z), \dots$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert G de \mathbb{C} .

Si la série $\sum |u_n(z)|$ converge uniformément dans G vers une fonction $F(z)$, et

si sa somme $\sum_{n \geq 1} |u_n(z)|$ est bornée dans G , alors le produit $\prod_{n \geq 1} (1+u_n(z))$

converge absolument et uniformément vers une fonction $F(z)$ holomorphe dans G .

De plus, $F(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n / 1+u_n(z) = 0$.

Proposition : Si $\infty \notin G$ et dans les hypothèses du théorème ci-dessus,

$$\forall z \in G / F(z) \neq 0 \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{u'_n(z)}{1+u_n(z)}$$

La série de droite étant presque uniformément convergente lorsque l'on a retiré les termes possédant un point singulier dans G (ces termes étant en nombre fini)

(Réf RMS 81/82 n°2)

Proposition : Lorsque $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1+u_n)$ est de même nature

que $\sum_{n \geq 1} \ln(1+u_n)$ (~~car $u_n \neq (1+u_n)$~~) (\ln = branche principale du logarithme complexe)

Proposition : La série $\sum \ln(1+u_n)$ est absolument convergente ssi la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Par suite, si $\sum |u_n|$ converge, $\prod (1+u_n)$ converge aussi.

Théorème de Weierstrass sur la décomposition des fonctions entières en produit

Théorème: Si $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ est une suite quelconque de nombres non nuls et tendant vers l'infini, et k un entier positif, il existe une fonction entière $F(z)$ possédant des zéros aux points z_1, \dots, z_n, \dots et un zéro d'ordre k au point 0 , et non nulle partout ailleurs. Si $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ est une suite arbitraire d'entiers positifs tels que la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda_n + 1}$ converge presque uniformément dans le plan ouvert borné, on peut prendre le produit absolument convergent suivant pour F :

$$F(z) = z^k \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{\lambda_n} \right)}$$

Corollaire: Soit $F(z)$ une fonction entière possédant un zéro d'ordre k au point 0 et dont la suite de ses zéros non nuls est z_1, \dots, z_n, \dots . Alors:

$$F(z) = e^{h(z)} z^k \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{\lambda_n}}$$

où $h(z)$ est une fonction entière et où la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ d'entiers positifs vérifie l'hypothèse du Théorème ci-dessus. Le produit converge absolument et presque uniformément dans le plan ouvert \mathbb{C} . En particulier, la valeur du produit est indépendante de l'ordre des facteurs.

1) Conditions de Cauchy

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ peut être considérée comme une fct de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} .

Soit $f(x,y) = P(x,y) + i Q(x,y)$ avec $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ holomorphe} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow |f(z+h) - f(z) - f'(z)h| = o(|h|) \quad \begin{matrix} h = h_1 + ih_2 \\ f'(z) = a + ib \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow |P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y) + i(Q(x+h_1, y+h_2) - Q(x,y)) - (a+ib)(h_1+ih_2)| = o(|h|)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y) - ah_1 + bh_2| = o(|h|) \\ \text{et} \\ |Q(x+h_1, y+h_2) - Q(x,y) - bh_1 - ah_2| = o(|h|) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ et } Q \text{ différentiables sur } \mathbb{R}^2 \text{ et :} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = a \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -b \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = a \end{cases}$$

$$f \text{ holomorphe} \Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ et } Q \text{ sont différentiables sur } \mathbb{R}^2 \\ \text{et vérifient les conditions de Cauchy :} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

2) Introduire les symboles $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ (1)

|| f est holomorphe si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (2)

On pose, par analogie, pour toute application \mathbb{R} -différentiable de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} dz = d(x+iy) = dx + i dy \\ d\bar{z} = d(x-iy) = dx - i dy \end{cases}$$

(égalités entre \mathbb{R} -appl. linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C})

$$\text{Soit} \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{i} (dz - d\bar{z}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{cases} \quad \text{et (1).}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{ou } f = P + iQ \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{cond. de Cauchy}) \Leftrightarrow f \text{ holomorphe.}, \text{ d'où (2)} \end{aligned}$$

NB : Si f est holomorphe, on aura $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Explicitons alors $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} - i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{= 2 \frac{\partial P}{\partial z}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{= 2 \frac{\partial Q}{\partial z}} i$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = a + ib \quad \text{avec les notations du 1)}$$

(ie en posant $a + ib = f'(z) = \text{nbre dérivé}$) - Ccl : $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ et $f(z) = f'(z) dz$

- a) Soit $z \mapsto f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe. Déterminer $f(z)$ sachant que $P = \frac{x(1+x) + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$.
- b) Étudier la dérivabilité de f définie pour $z \in \mathbb{C}$ par : $f(z) = z|z|$ directement, puis en utilisant les conditions de Cauchy.

a) $f(z) = P + iQ$ est holomorphe si
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Conditions de Cauchy)} \\ \text{(et, bien sûr, } P \text{ et } Q \text{ sont} \\ \text{différentiables sur } \mathbb{R}^2 \text{)} \end{array}$$

Cela nous permet de remonter à Q :

$$P = \frac{x^2 + x + y^2}{x^2 + 2x + 1 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y(x+1)}{(x^2 + 2x + 1 + y^2)^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{y}{x^2 + 2x + 1 + y^2} + \underbrace{F(x)}_{\text{fonction différentiable de } x} \quad (*)$$

Réc., si Q est défini par $(*)$, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} & \text{(on le vérifie, en notant que } \frac{\partial}{\partial y} F(x) = 0 \text{)} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} & \text{(par construction)} \end{cases}$$

Cl : Les fonctions $f(z)$ répondant à la question sont :

$$f(z) = \frac{x(1+x) + y^2}{(1+x)^2 + y^2} + i \left(\frac{y}{(1+x)^2 + y^2} + F(x) \right)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.

$$b) f(z) = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} = P+iQ \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P = x\sqrt{x^2+y^2} \\ Q = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Les cond. de Cauchy sont $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2 = x^2+2y^2 \\ xy = -yx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

Concl : f n'est pas holomorphe sur U , pour tout ouvert U de \mathbb{C}^* .

Remarque directe : Dire que f est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}^*$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad |z-z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - z_0 f(z_0) - l(z-z_0)| < \varepsilon |z-z_0| \quad (1)$$

pour un $l \in \mathbb{C}$ convenable.

Pour $z = z_0 t$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $|z_0 t - z_0| < \eta$, (1) devient :

$$|z_0 t| z_0 |t - z_0| z_0 - l z_0 (t-1) < \varepsilon |z_0| |t-1|$$

$$|z_0| (t+1) - l < \varepsilon$$

On peut faire tendre t vers 1 : $|2z_0| - l < \varepsilon$,

et ceci devrait être vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc nécessairement $\boxed{l = 2|z_0|}$

Reinjecter dans (1) et obtenir une contradiction. Ce n'est pas bon.

$$\text{Fonction } \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Ref. [Ser] p115

Proposition : la fonction ζ est holomorphe et $\neq 0$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$ et l'on a : $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \varphi(s)$ où $\varphi(s)$ est holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Corollaire : La fonction zêta a un pôle simple pour $s=1$. On a, de plus :

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s} \sim \ln \frac{1}{s-1} \quad (s \rightarrow 1)$$

alors que $\sum_{p, k \geq 2} \frac{1}{p^{ks}}$ reste borné.

Résultats : $\zeta(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec un seul pôle $s=1$. $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$.

$\zeta(s)$ prend des valeurs rationnelles sur les entiers négatifs :

$$\begin{cases} \zeta(-2n) = 0 & (n > 0) \\ \zeta(1-2n) = (-1)^n \frac{B_n}{2n} & (B_n = n\text{-ième nombre de Bernoulli}) \end{cases}$$

On conjecture (hypothèse de Riemann) que les autres zéros de ζ se trouvent sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (non encore prouvée, mais vérifiée pour 3 millions de zéros !)